Soluzioni II prova di maturità per licei scientifici

Alessio Giarnetti, Mariapia D'Urso,
Francesca Marchetti, Matteo Salicandro,
Salvatore Failla, Emilio Rossi

20 Giugno 2024

Problemi

Problema 1

a) Consideriamo la funzione $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$. La retta t ha equazione $7x + y - 12 = 0$. Possiamo riscriverla come $y = -7x + 12$. Vogliamo che questa retta sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel punto P di ascissa $x = 1$. Pertanto, dobbiamo avere:

- $f_{a,b}(1) = -7(1) + 12$
- $f'_{a,b}(1) = -7$

Calcoliamo $f_{a,b}(1)$:

$$f_{a,b}(1) = \frac{a(1)^3 + b}{(1)^2} = a + b \tag{1}$$

Dobbiamo avere: $a + b = 5$

Ora calcoliamo la derivata $f'_{a,b}(x)$:

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) &= ax + \frac{b}{x^2} \\ f'_{a,b}(x) &= a - \frac{2b}{x^3} \end{aligned} \tag{2}$$

Calcoliamo $f'_{a,b}(1)$:

$$f'_{a,b}(1) = a - 2b \tag{3}$$

Dobbiamo avere: $a - 2b = -7$

Abbiamo quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - 2b = -7 \end{cases} \tag{4}$$

Risolviamo il sistema: Moltiplichiamo la prima equazione per 2: $2a+2b = 10$

Sottraiamo la seconda equazione dalla nuova equazione:

$$\begin{aligned} 2a + 2b - (a - 2b) = 10 - (-7) \\ 2a + 2b - a + 2b = 17 \\ a + 4b = 17 \end{aligned} \tag{5}$$

Dalla prima equazione abbiamo $a + b = 5$, quindi:

$$\begin{cases} b = 4 \\ a = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Che sono i valori dei parametri cercati.

b) Studiamo ora la funzione $\frac{x^3+4}{x^2}$.

La funzione diventa:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2} \tag{7}$$

Studio la derivata prima:

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} \tag{8}$$

Studio la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{24}{x^4} \tag{9}$$

Abbiamo dunque

- **Dominio**: La funzione è definita per $x \neq 0$.
- **Intersezioni con gli assi**:
  - y-intercetta: Non esiste poiché la funzione non è definita in $x = 0$.
  - x-intercetta: $f(x) = 0 \implies x + \frac{4}{x^2} = 0$. Risolvendo:

$$x^3 + 4 = 0 \implies x^3 = -4 \implies x = -\sqrt[3]{4} \tag{10}$$

- **Asintoti**:
  - Asintoto verticale: $x = 0$
  - Asintoto orizzontali: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{4}{x^2}\right) = \infty$ (comportamento infinito)
  - Asintoto obliquo: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x + \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$ (comportamento infinito)

L'equazione potrebbe avere asintoti obliqui. Per trovare l'equazione degli asintoti obliqui, dobbiamo analizzare ora il comportamento della funzione per x che tende all'infinito e a meno infinito. Gli asintoti obliqui hanno la forma generale $y = mx + q$, dove m è il coefficiente angolare e q è l'ordinata all'origine.

1. **Calcolo del coefficiente angolare m**:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{11}$$

Per la nostra funzione:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = 1 \tag{12}$$

2. **Calcolo dell'ordinata all'origine q:**

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) \tag{13}$$

Dato che $m = 1$:

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \tag{14}$$

3. **Equazione degli asintoti obliqui**: Poiché $m = 1$ e $q = 0$, l'equazione degli asintoti obliqui è:

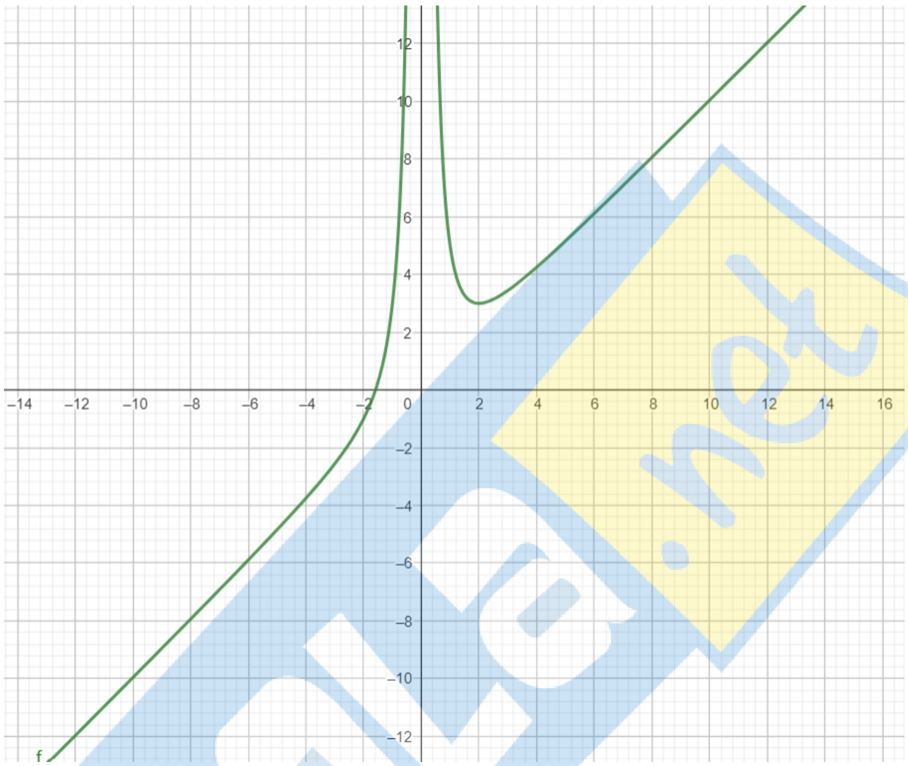
$$y = x \tag{15}$$

Pertanto, la funzione $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ ha un asintoto obliquo con equazione $y = x$.

- **Punti critici e concavità**:
  * $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \implies 1 = \frac{8}{x^3} \implies x^3 = 8 \implies x = 2$
  * $f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0$ per ogni $x \neq 0$, quindi la funzione è sempre concava verso l'alto.

Grafico della funzione $f(x)$:

- La funzione presenta un punto di massimo relativo in $x = 2$.



Il problema ci chiede successivamente di trovare la seconda retta passante per il punto di ascissa $x = 1$, che ha coordinate quindi $P = (1, 5)$ per la nostra funzione. Per fare ciò, scriviamo la retta tangente generica in un punto x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{16}$$

Dato che $f(x) = (x^3 + 4)/x^2$ e $f'(x) = (1 - 8/x^3)$ possiamo vedere che una retta tangente generica avrà la forma

$$y = \frac{x_0^3 + 4}{x_0^2} + \left(1 - \frac{8}{x_0^3}\right)(x - x_0) \tag{17}$$

Imponendo il passaggio per il punto di coordinate (x,y)=(1,5), ovvero per il punto P, l'equazione diventa automaticamente, dopo alcune semplificazioni

$$x_0^3 - 3x_0 + 2 = 0 \tag{18}$$

che ha due soluzioni reali:

$$x = -2 \quad x = 1 \tag{19}$$

La seconda soluzione corrisponde al punto P, troveremmo quindi in questo caso la retta trovata all'inizio del problema. La prima soluzione è invece quella che ci interessa. La seconda retta tangente alla quale siamo interessati, è quella nel punto $x = -2$ e ha equazione $y = -2x + 1$.

c) Adesso prendiamo la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$, ovvero il fascio di rette che passano per il punto P. Cerchiamo allora quanti intersezioni hanno queste rette e il grafico della curva. Per fare ciò, mettiamo a sistema

$$\begin{cases} y - 5 = m(x - 1) \\ y = \frac{x^3+4}{x^2} \end{cases} \tag{20}$$

da cui otteniamo che dobbiamo studiare le soluzioni dell'equazione

$$m(x - 1) + 5 = \frac{x^3 + 4}{x^2} \tag{21}$$

che diventa una equazione di terzo grado

$$x^3(m - 1) + x^2(5 - m) - 4 = 0 \tag{22}$$

Prendiamo prima il caso particolare $m = 1$, quando l'equazione diventa quella di una parabola, ovvero $x^2 - 1 = 0$. Questa ha ovviamente **due** soluzioni. Sono solo due perchè in questo caso la retta è parallela all'asintoto. Nel resto dei casi, dobbiamo studiare il polinomio di terzo grado per capire quanti zeri ha al variare di m. Per fare ciò, vediamo quanti massimi e minimi ha la funzione. Sappiamo che in generale una equazione di terzo grado può essere o monotona (non ha massimi o minimi) e in questo caso avremo sicuramente un solo zero, oppure può avere un massimo e un minimo. In questo caso, a seconda del segno del valore assunto dalla funzione in questi due punti stazionari, potremo avere uno, tre o due soluzioni. Prendiamo allora la derivata del nostro polinomio e poniamola a zero

$$3x^2(m - 1) + 2x(5 - m) = 0 \tag{23}$$

Questa equazione avrà sicuramente sempre due soluzioni reali, ovvero

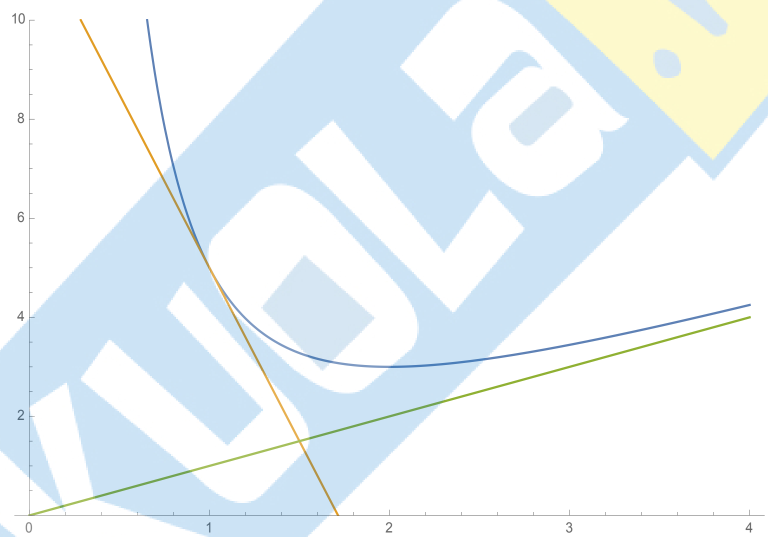
$$x = 0 \qquad x = \frac{2(m - 5)}{3(m - 1)} \tag{24}$$

Si noti che stiamo cercando i minimi e i massimi di una funzione scollegata alla nostra f(x) quindi non c'è bisogno di scartare x=0. Vediamo che il nostro polinomio, in $x = 0$ vale sempre -4, quindi è negativo. Invece, in $x = \frac{2(m-5)}{3(m-1)}$ vale

$$f\left(\frac{2(m - 5)}{3(m - 1)}\right) = -4\frac{(m - 2)(m + 7)^2}{27(m - 1)^2} \tag{25}$$

la quale è negativa per $m > 2$, positiva per $m < 2$. Possiamo quindi concludere che, per $m > 2$ tutte e due i massimi e i minimi del nostro polinomio di terzo grado sono negativi, quindi l'equazione $3x^2(m-1)+2x(5-m)=0$ ha **una** soluzione, e l'intersezione tra la retta e la curva del grafico è solo una. Per $m<2$ (con $m\neq 1$), invece, abbiamo che il polinomio ha un minimo negativo e un massimo positivo, di conseguenza avrà **tre** zeri e la retta avrà tre intersezioni con il grafico della funzione. Quando invece $m=2$, otteniamo che il nostro polinomio ha soli due zeri, poichè il massimo della funzione si trova in $x=0$. Quindi, la retta toccherà il grafico della funzione solo **due** volte. Abbiamo un altro caso particolare. Infatti anche quando $m=-7$ il massimo della funzione si trova in 0! Siamo infatti nel caso particolare della retta tangente alla curva in P. In conclusione

- una intersezione per $m>2$.
- due intersezioni per $m=1$ e $m=2$ e $m=-7$.
- tre intersezioni altrimenti.



d) Consideriamo adesso l'ultimo punto. Vediamo dalla figura come la regione di piano è un triangolo curvilineo che si chiude per $k\to\infty$ (quando il grafico della funzione incontra l'asintoto), mentre per k finito deve essere tagliato alla sua destra da una retta verticale $x=k$. Per calcolare l'area di questa regione, sappiamo che il suo vertice sinistro è il punto P di coordinate (1,5), mentre il vertice in basso è l'intersezione tra la retta t e l'asintoto, ovvero il punto di coordinate (3/2,3/2). Da qui si capisce la necessità di avere $k>3/2$. Quindi, la regione di piano sarà data da

$$A=\int_1^k f(x)dx-\left(\int_1^{3/2}(12-7x)dx+\int_{3/2}^k xdx\right) \tag{26}$$

La primitiva di $f(x)$ è $F(x) = x^2/2 - 4/x$, mentre per le altre due funzioni otteniamo rispettivamente $12x - 7/2x^2$ e $x^2/2$. Svolto l'integrale definito si ottiene

$$A = \frac{1}{2}\left(k^2 + 7 - \frac{8}{k}\right) - \frac{13}{8} + \frac{9}{8} - \frac{k^2}{2} = 3 - \frac{4}{k} \tag{27}$$

, che per k che tende ad infinito fa $A = 3$. Questo si spiega perchè all'inifito l'asintoto e la curva si toccano chiudendo il triangolo, che ha un'area finita.

Problema 2

- (a) Per verificare che per nessun n la funzione è derivabile, calcoliamo la derivata prima della funzione

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$$

Troviamo che;

$$(\sqrt{ax^2 + bx + 1})' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}$$

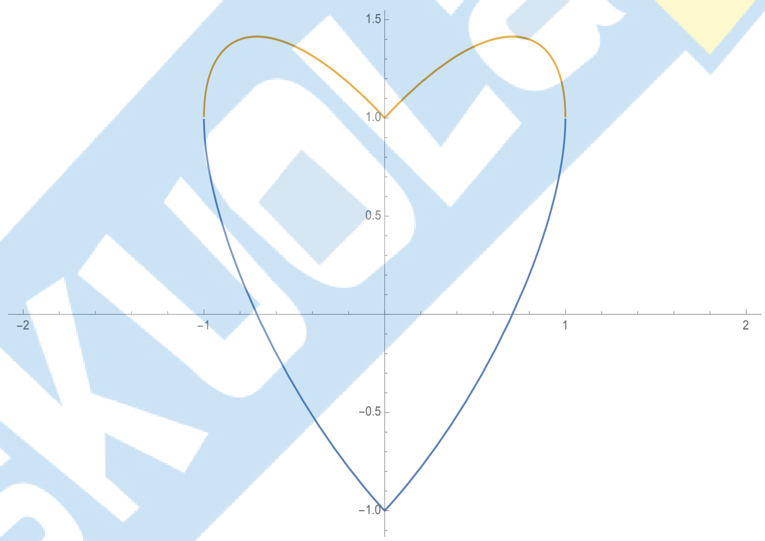
Che è definita in $x = 0$, quindi studiamo la derivabilità di $\sqrt[n]{x^2}$. Questa varrà $\frac{2}{n}\frac{x^{\frac{2}{n}}}{x}$. Notiamo che per $n > 2$ sicuramente questa derivata va a $\pm\infty$ per $x \to 0^{\pm}$. Invece per $n = 2$, otteniamo che il limite fa ± 1 per $x \to 0^{\pm}$. Quindi essendo le derivate infinite, o diverse a destra e sinistra, automaticamente otteniamo che la funzione $f_n(x)$ non potrà mai essere derivabile in 0.
Per trovare n in modo tale che f_n abbia un punto angoloso in $x = 0$, possiamo usare il risultato precedente in cui abbiamo notato che per $n = 2$ le derivate a destra e sinistra erano diverse, mentre per $n > 2$ erano inifite. Oppure, bisogna imporre che il limite della derivata esista e abbia valore finito. Calcoliamo quindi il valore di:

$$(\sqrt[n]{x^2})' = \frac{2}{n}\frac{x^{\frac{2}{n}}}{x}$$

Affinché il limite esista $x^{\frac{2}{n}}$ e x devono avere lo stesso ordine di infinitesimo ovvero $\frac{2}{n} = 1$. Segue che $n = 2$.
Per la determinazione dei parametri a, b è necessario osservare il grafico e notare che si ha $f(1) = f(-1) = 1$. Sostituendo $x = 1, x = -1$ nell'espressione analitica di $f(x)$, ovvero $f(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ si ottiene che $f(1) = 1 - \sqrt{a + b + 1} = 1$ e $f(-1) = 1 - \sqrt{a - b + 1} = 1$. Da queste ultime informazioni ricaviamo che $a + b + 1 = 0$ e $a - b + 1 = 0$. Si tratta di un sistema lineare di due equazioni e due incognite che risolto fornisce la soluzione $a = -1, b = 0$.

- (b) La funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$ ha come dominio $1 - x^2 \geq 0$ ovvero $-1 \leq x \leq 1$. Si tratta di una funzione pari in quanto $g(x) = g(-x)$ per

ogni x nel dominio di f. In particolare, le sue intersezioni con l'asse x non esistono, perché corrispondono alle soluzioni di $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} = 0$. Questo segue dal fatto che una somma di quantità non negative è uguale a 0 se e solo se sono entrambe 0, che è chiaramente impossibile. La funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 1)$.
Calcoliamo ora la derivata prima, ricordando che la funzione $segno(x)$ restituisce 1 se $x > 0$, -1 altrimenti: $g'(x) = segno(x) + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. $g'(x) = 0$ se e solo se $segno(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Risolvendo $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ si ottiene $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, che è un punto critico (massimo locale) di g. Data la parità di g segue che anche $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto critico (ancora massimo locale) di g. Verifichiamo ora come richiesto, la non derivabilità in 0 e in 1 (non è necessario verificarla in -1 data la parità di g). Notiamo che $\lim_{x \to 0^-} g'(x) = -1 + 0 = -1$ mentre $\lim_{x \to 0^+} g'(x) = 1 + 0 = 1$, segue che $x = 0$ è un punto di non derivabilità (punto angoloso). Calcolando ora $\lim_{x \to 1^-} g'(x)$ si ottiene come risultato $1 - \infty = -\infty$. Segue che in $x = 1$ abbiamo una tangente verticale, così come in $x = -1$ data la parità di g. L'unione delle due curve f_2 e g forma l'immagine di un cuore (vedi figura). Infatti, $f_2(-1) = g(-1)$ e $f_2(1) = g(1)$.



- (c) Per simmetria della curva γ è sufficiente studiare il caso $x \geq 0$. Consideriamo la retta $x = k$. In tal caso, si nota che $f_2(x = k) = k - \sqrt{1-k^2}$ mentre $g(x = k) = k + \sqrt{1-k^2}$. La retta $x = k$ infatti interseca prima f_2 e poi g. Calcoliamo la distanza tra le due intersezioni:

$$||g(x = k) - f_2(x = k)|| = 2\sqrt{1-k^2}$$

Per $k \geq 0$ la funzione $\sqrt{1-k^2}$ decresce strettamente, quindi il massimo viene ottenuto per $k = 0$ ovvero quando la retta $x = k$ è l'asse y, nonché l'asse di simmetria della figura γ.

- (d) Per verificare che $H(x)$ è una primitiva di tale funzione, è sufficiente calcolare $H'(x)$ e verificare che coincide con $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calcolando la derivata con la Regola di Leibniz:

$$\left(\frac{1}{2}\left(arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2}$$

che conferma quanto volevamo dimostrare.
Per quanto riguarda l'area racchiusa dalla curva γ è sufficiente effettuare il calcolo per $x > 0$ e poi moltiplicare per 2 il risultato data la simmetria della curva. Il conto da fare è il seguente:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} - x dx + \left(1 - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x - \sqrt{1-x^2} dx\right) + \left(\int_0^1 x + \sqrt{1-x^2} dx\right) - 1$$

Il risultato va poi moltiplicato per 2 perché la somma di quei tre integrali fornisce solo metà area. Sfruttando il risultato relativo alla primitiva di $\sqrt{1-x^2}$ che abbiamo ottenuto precedentemente, si ottiene:

$$A = 2\left(\frac{\pi}{8} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - 1\right) = \pi$$

Quesiti

Quesito 1. Dividiamo la dimostrazione in due parti: dimostriamo prima che se ABC è isoscele, allora l'altezza BH è congruente a metà ipotenusa. Se ABC è isoscele, i due cateti AB, BC sono congruenti. Sia $AB = BC = x$. Allora l'area del triangolo ABC è data da $\frac{x \cdot x}{2}$; inoltre, per il Teorema di Pitagora, $AC = x \cdot \sqrt{2}$. Applicando la formula inversa per l'area, segue che $BH = \frac{2 \cdot Area}{BC} = \frac{x^2}{x\sqrt{2}} = x\frac{\sqrt{2}}{2}$, ma $AC = x\sqrt{2}$, che è quanto volevamo dimostrare. Supponiamo ora che BH sia uguale a metà ipotenusa, dimostriamo allora che ABC è isoscele. Sia M il punto medio di AC, allora M è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC (Teorema di Dante), quindi $BH = BM$. Tuttavia $\widehat{BHM} = 90°$, ma essendo $BH = BM$ un triangolo isoscele con un angolo alla base pari a $90°$ non può esistere, segue che H coincide con M. Se H coincide con M allora H è sia il piede dell'altezza relativa ad AC che il punto medio di AC, ergo ABC è isoscele su base AC.

Quesito 2. Il problema del lancio della moneta si basa su prove ripetute e indipendenti, in cui è possibile avere soltanto due risultati (testa/croce).
Per questo motivo, la distribuzione di probabilità di ottenere testa 2 volte utilizzando la moneta truccata può essere calcolata attraverso la formula della distribuzione di Bernoulli. La formula è la seguente:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Dove:
$n = 5$ rappresenta il numero totale dei lanci
$k = 2$ rappresenta il numero di risultati "testa" ottenuti (ossia il risultato "desiderato")

Quindi, la distribuzione di probabilità rispetto a p può essere descritta come segue:

$$\begin{aligned} P &= \frac{5!}{(5-2)!2!} p^2 (1-p)^{5-2} \\ &= \frac{5!}{3!2!} p^2 (1-p)^3 \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} p^2 (1-p)^3 \\ &= 10p^2(1-p)^3 \end{aligned}$$

La funzione ottenuta rappresenta la distribuzione della probabilità di ottenere testa due volte in funzione di p, ossia la probabilità con cui la moneta truccata dà testa.
Per definitire per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima bisogna calcolare la derivata prima della funzione ottenuta rispetto a p ed eguagliarla a 0.

$$\begin{aligned} P &= 10p^2(1-p)^3 \\ P' &= 10[2p(1-p)^3 - p^2 3(1-p)^2] = \\ &= 10p(1-p)^2[2(1-p) - 3p^2] \end{aligned}$$

Per trovare il valore di p per cui la probabilità di avere due risultati "testa" è massima bisogna imporre la derivata prima uguale a 0. Ciò accade se

$$p = 1 \quad p = 0$$

che sono le due soluzioni banali (ovvero si perde o si vince sempre), mentre la terza, interessante soluzione è

$$p = \frac{2}{5} \tag{28}$$

Quesito 3. In questo caso abbiamo un piano di equazione $3x - 2y + 5 = 0$ e un punto P $(4, 2, 1)$ di cui vogliamo trovare la proiezione ortogonale sul piano. Sostituendo le coordinate nell'equazione del piano si vede da subito che P non appartiene al piano. Ci serve allora trovare una retta perpendicolare al piano che passi per il punto P per poi trovare il punto di intersezione H tra la retta trovata e il piano. Dai coefficienti del piano, troviamo che il vettore normale ad esso è $(3, -2, 0)$, di conseguenza la retta perpendicolare al piano la possiamo scrivere in forma parametrica come, in generale

$$r: \begin{cases} x = 3t + a \\ y = -2t + b \\ z = c \end{cases} \tag{29}$$

dove (a, b, c) indicheranno le coordinate di un punto qualsiasi dal quale la retta passa. Siccome sappiamo che la retta deve passare per P, troviamo direttamente che

$$r: \begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = -2t + 2 \\ z = 1 \end{cases} \tag{30}$$

che equivale alla scrittura cartesiana

$$r: \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \\ z = 1 \end{cases} \quad . \tag{31}$$

Cercando l'intersezione tra il piano e la retta (mettendo a sistema l'equazione del piano e quelle della retta), troveremo il punto H. In particolare avremo che da

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \\ z = 1 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \tag{32}$$

otteniamo $x = 1$, $y = 4$ e $z = 1$. Quindi il punto H ha coordinate (1,4,1).
Infine, per risolvere il quesito ci viene chiesto di trovare l'intersezione tra il piano già citato e la retta

$$s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} . \tag{33}$$

Procedendo come nel punto precedente mettendo a sistema le equazioni della retta e quella del piano, troviamo che $x = -3$, $y = -2$, $z = 2$. Quindi il punto di intersezione è il punto Q=(-3,-2,2).

Quesito 4. Consideriamo il dominio di $f(x)$: la funzione è costituita da due funzioni polinomiali di primo e terzo grado e la funzione periodica coseno, quindi f è definita su tutto $\mathbb{R}$.
Visto che dobbiamo dimostrare che la funzione ammette una soluzione reale positiva, consideriamo il teorema dell'esistenza degli zeri. Dobbiamo trovare un intervallo $[a; b]$ in cui $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Consideriamo l'intervallo positivo $[0; 1]$ quindi si avrà: $f(0) = -1$ e $f(1) = 1.46$
Quindi l'intervallo verifica le ipotesi del teorema, allora si avrà un punto x_0 con $0 < x_0 < 1$ tale che: $f(x_0) = 0$ La funzione ammette una soluzione positiva nell'intervallo considerato, ma dobbiamo dimostrare che sia unica.
Calcoliamo la derivata di $f(x)$ e studiamone il segno per vedere quando è crescente, avremo:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + senx > 0$$

Analizziamo ciascun termine: il primo è un polinomio di secondo grado, quindi sempre positivo, il secondo è un numero sempre maggiore di zero e il terzo è una funzione periodica che varia tra -1 e 1. Quindi complessivamente la funzione sarà sempre positiva e strettamente crescente in un intorno di 0 ma allora $f(x)$ può avere solamente uno zero (positivo) in $[0; 1]$.

Quesito 5. Per determinare una funzione polinomiale di quarto grado che soddisfi le condizioni date, iniziamo scrivendo la forma generale di un polinomio di quarto grado:

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \tag{34}$$

Le condizioni che ci chiede il problema sono

- La funzione è tangente all'asse x nell'origine
- La funzione passa per il punto (1,0)

- La funzione ha un punto stazionario in (2,-2).

Dal punto di vista matematico, quindi, abbiamo che

- p(0)=0 e p'(0)=0, da cui otteniamo e=0
- p(1)=0
- p(2)=-2 e p'(2)=0

Derivando il polinomio otteniamo

$$p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \tag{35}$$

da cui, usando la condizione p'(0)=0, otteniamo d=0. Quindi il polinomio ha la forma

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 \tag{36}$$

Utilizzando le condizioni restanti troviamo

- Da p(1)=0 abbiamo $a + b + c = 0$
- Da p(2)=-2 abbiamo $16a + 8b + 4c = -2$
- Da p'(2)=0 abbiamo $8a + 3b + c = 0$

E' un sistema di tre equazioni in tre incognite che ha una sola soluzione. Risolvendo col metodo di sostituzione otteniamo $a = 1$, $b = -7/2$ e $c = 5/2$. La funzione polinomiale cercata è quindi

$$p(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \, . \tag{37}$$

Si può verificare come tutte le condizioni siano soddisfatte.

Quesito 6. La funzione integrale può essere risolta ricorrendo all'uso dell'integrale:

$$\int cos[f(x)]f'(x)dx = sin[f(x)];$$

dunque:

$$\int \frac{(cos(1/t)}{t^2}dt = -sin(\frac{1}{t});$$

valutando l'integrale tra gli estremi di integrazione [a, x] si ottiene la seguente espressione:

$$-sin(\frac{1}{x}) + sin(\frac{1}{a})$$

Si passa alla determinazione del paramentro a imponendo che in

$$x = \frac{2}{\pi}$$

la primitiva assume un valore pari a:

$$F(2/\pi) = -\frac{1}{2};$$

giungendo all'equazione:

$$F(\frac{2}{\pi}) = -sin(\frac{\pi}{2}) + sin(\frac{1}{a}) = -\frac{1}{2}$$

da cui si ricava:

$$-1 + sin(\frac{1}{a}) = -\frac{1}{2} => sin(\frac{1}{a}) = \frac{1}{2} => \frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ottenendo le due famiglie di soluzioni:

$$a = \frac{6}{\pi(1+12k)} \tag{38}$$

e

$$a = \frac{6}{\pi(5+12k)} \tag{39}$$

dove

$$k \in Z \tag{40}$$

il più grande valore di a risulta essere quello corrispondente a k=0 e cioè:

$$a = \frac{6}{13\pi} \tag{41}$$

Quesito 7. L'orbita terrestre intorno al sole può essere ricondotta con buona approssimazione ad una traiettoria ellittica; conoscendo, dunque le distanze terra-sole massima e minima e, partendo dalla generica equazione di un ellisse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{42}$$

l'orbità può essere determinata calcolando i due semiassi dell'ellisse:

$$a = \frac{dist.afelio + dist.perielio}{2} = \frac{(1,52 * 10^{11} + 1,47 * 10^{11})m}{2} = 1.495 * 10^{11}m$$

successivamente si determina l'eccentricità nel seguente modo:

$$e = \frac{dist.afelio}{a} - 1 = \frac{1,52 * 10^{11}m}{1,495 * 10^{11}m} - 1 = 0,017$$

con l'eccentricità si può ricavare la semidistanza focale c nel seguente modo:

$$c = e * a = 0,017 * 1,495 * 10^{11}m = 2,5 * 10^{11}m$$

e successivamente ricavare il semiasse b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(1,495 * 10^{11}m)^2 - (2,5 * 10^{11}m)^2} = 1,495 * 10^{11}m$$

infine l'Equazione della traiettoria che segue la Terra rispetto al centro dell'orbita, considerata nel sistema di riferimento centrato nell'origine e avente il Sole come uno dei due fuochi, è la seguente:

$$\frac{x^2}{(1,495 * 10^{11})^2} + \frac{y^2}{(1,495 * 10^{11})^2} = 1$$

Quesito 8.

Soluzione: Sia x il lato dell'esagono regolare $ABCDEF$. Risulta noto che ogni esagono regolare ha un angolo interno pari a 120°. Se O è il centro dell'esagono, segue quindi che tutti i triangoli $OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OFA$ sono equilateri. Sia H la proiezione di O sul lato AB, il problema richiede quindi la determinazione del rapporto $\frac{OA}{OH}$ (senza perdere di generalità, studiamo il triangolo equilatero OAB).
Dunque essendo OAB equilatero, i suoi lati OA, AB, OB hanno tutti misura x. Segue che $OH = x \cdot sin(\frac{\pi}{3}) = x\frac{\sqrt{3}}{2}$. In definitiva il rapporto richiesto vale $\frac{OA}{OH} = \frac{x}{x\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Pavimentare un piano con piastrelle esagonali è possibile perché 120° è un divisore di 360°. Lo stesso lavoro si può fare, ad esempio, con piastrelle quadrate perché 90° è un divisore di 360°; o piastrelle a forma di triangoli equilateri, perché 60° è un divisore di 360°.